Travaux Dirigés

Mathématiques L1 Semestre 1

Ce dossier contient les énoncés des exercices qui seront résolus au cours des séances de TD.

La présence des étudiants à ces séances est obligatoire.

Les modifications d'inscription dans les séries de TD ne sont autorisées qu'avec l'accord de l'administration ; seules des permutations entre étudiants sont éventuellement possibles.

Les examens nécessitent :

- La connaissance du cours (démonstrations comprises)
- La préparation des séances de TD
- L'étude des exercices corrigés distribués en dossiers

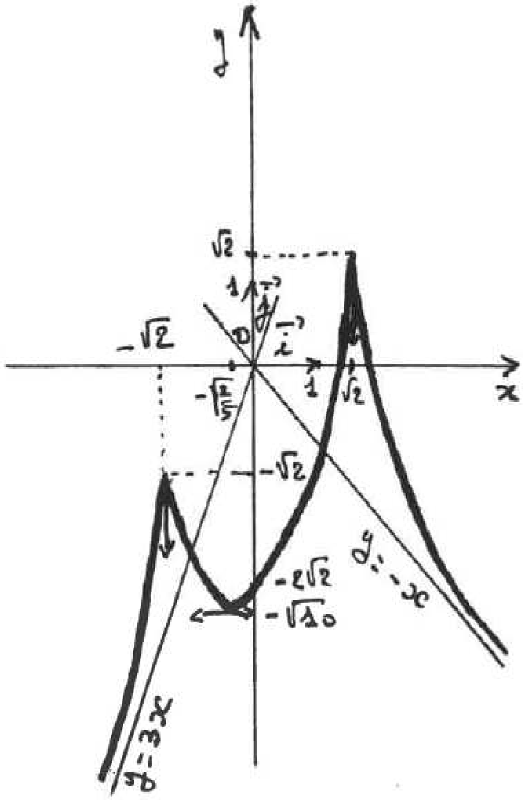
Ces trois derniers points feront l'objet d'une épreuve.

La correction des copies d'examen prend particulièrement en compte **les explications des solutions et leur présentation.**

Ce dossier a été conçu par Jean Louis SOL

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 2\sqrt{|2 - x^2|}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



1. Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f
2. Montrer que la fonction f peut être définie par :
   $f(x) = x - 2\sqrt{2 - x^2}$ pour $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ (c'est à dire $|x| < \sqrt{2}$)
   $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$
   $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 2}$ pour $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$ (c'est à dire $|x| > \sqrt{2}$)
3. Pour $|x| < \sqrt{2}$, puis pour $|x| > \sqrt{2}$, trouver l'expression de la dérivée de f et étudier son signe ; montrer que ces expressions tendent vers l'infini quand x tend vers $\sqrt{2}$ ou vers $-\sqrt{2}$
4. Donner les variations de f et trouver ses extrémums
5. Trouver l'équation de la tangente à Cf en 0
6. On remarque que pour tout $x \neq 0$ on peut écrire $\sqrt{x^2 - 2} = |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}$
   Cherchez $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$;
7. Montrer que pour $x \to +\infty$ (respectivement pour $x \to -\infty$) la droite d'équation $y = -x$ (resp. $y = 3x$) est asymptote à Cf
8. Précisez les abscisses des points d'intersection de Cf et de ses droites asymptotes
9. Tracer Cf

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Déterminez les réels a,b et c tels que pour tout réel $x \neq 2$ sachant que $f(0)=-4$ et que Cf passe par un extrémum stationnaire au point (3,5)
2. Vérifier que $f(x)=\frac{2x^2-7x+8}{x-2}$
    a. En effectuant une addition de fonctions rationnelles
    b. En effectuant une division euclidienne
3.
    a. Trouver l'équation des droites tangentes à Cf en 0 et en 3
    b. Trouver l'équation d'une fonction affine équivalente à f au voisinage de l'infini
4. Etudier la fonction f

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=2\sqrt{x-2}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f
2. Sans déterminer $f'(x)$, calculer $f'(3)$, en déduire l'équation de la droite (T) tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 3
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.
4. Etudier f

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur [0,5] par $f(x)=-x^2+5x-4$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Construire Cf
2. Montrer que, sur certains intervalles, f définit des fonctions réciproques ; déterminer l'expression de ces fonctions réciproques et construire leur courbe représentative dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
3. Déterminer les expressions des dérivées des fonctions réciproques précédentes en utilisant deux méthodes.

Exercice 5

Soit les fonctions f, g, h, m suivantes de courbes représentatives Cf, Cg, Ch, Cm tracées dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

f telle que $f(x) = 2\sqrt{x-2}$

g telle que $\mathrm{g}(x) = f(x)$ pour $x \geq 2$

Et $\mathrm{g}(x) = -\sqrt[3]{2-x}$ pour $x < 2$ (remarque $\sqrt[3]{2-x}$ peut s'écrire $(2-x)^{\frac{1}{3}}$)

h telle que $\mathrm{h}(x) = f(x)$ pour $x > 3$

$\mathrm{h}(3) = 2$

$\mathrm{h}(x) = 3 - \frac{9}{x}$ pour $x < 3$

m telle que $\mathrm{m}(x) = f(x)$ pour $x > 3$

$\mathrm{m}(3) = 2$

$\mathrm{m}(x) = 5 - \frac{9}{x}$ pour $x < 3$

1. Montrer que f a une fonction réciproque f^{-1}, déterminer f^{-1} et construire sa courbe représentative Cf^{-1} d'équation $y = f^{-1}(x)$;
   Donner l'équation de la tangente à Cf^{-1} au point d'abscisse 2 (NOTA : pour répondre à cette question, il est conseillé d'utiliser les résultats obtenus lors de la résolution de l'exercice 3)
2. Sans déterminer $g'(x)$, $h'(x)$, $m'(x)$, étudier la continuité, puis la dérivabilité des fonctions g, h, m.
3. Déterminer $g'(x)$ pour $x < 2$ et $m'(x)$ pour $0 < x < 3$
   Trouver $\lim_{x \to 2^-} g'(x)$ et $\lim_{x \to 3^-} m'(x)$ et commenter les résultats obtenus.
4. Sur [1,2] montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et que m admet une fonction réciproque m^{-1}.
   Déterminer g^{-1} et m^{-1}
   Calculer de deux façons différentes $(g^{-1})'(-1)$ et $(m^{-1})'(\frac{1}{2})$

Exercice 6

Soit la fonction $f: x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ et la fonction $g: x \mapsto 2|x|\sqrt{1-x^2}$ de courbes représentatives Cf, Cg, tracées dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions $f\ etg$
2. Déterminer $f'(x)\ \ et\ f''(x)$; commenter les résultats obtenus.
3. Compléter l'étude de la fonction f, caractériser son point d'abscisse 0.
4. Etudier la fonction g, caractériser son point d'abscisse 0.

Exercice 7

Etudier la fonction f telle que $(f(x))^3 = 1 - x^2$ et tracer sa courbe représentative Cf dans un repère orthogonal (NOTA : on pourra poser $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ en convenant que pour < 0 , $\sqrt[3]{u}$ signifie $-\sqrt[3]{-u}$)

Exercice 8

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Montrer que , pour $x \neq 1$, on peut écrire l'expression de f sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$ où $a, b, c\ et\ d$ sont des nombres réels.
2. Etudier la fonction f
3. On donne, pour $x \neq 1$, $f''^{(x)} = \frac{6x}{(x-1)^4}\ \ \ et\ f'''^{(x)} = \frac{-18x-6}{(x-1)^5}$
   a. Ecrire les formules de Taylor avec reste de Young à l'ordre 3 pour $x = 0$, pour $x = 2$ et pour $x = 3$, commenter les résultats obtenus.
   b. Donner les intervalles de concavité et de convexité de la fonction f
4. Montrer que sur $]1{,}3[$ la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}, donner le domaine de définition de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(8)$

Exercice 9

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3-3x^2-x+2}{x-1}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Déterminer quatre nombres réels $a, b, c\ et\ d$ tels que, pour $x \neq 1$,
$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}$$
2. Etudier les branches infinies de la fonction f.
3. A l'aide de la formule de Taylor,

a. Trouver l'équation de la droite (T) tangente à (Cf) en 0 et préciser la position de (Cf) par rapport à (T) quand x tend vers 0.
b. Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

Exercice 10

Etudier la fonction f telle que $f(x) = -\frac{x}{2} + 2 + 2\sqrt{x-2}$ et (Cf) sa courbe représentative tracée dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\|\vec{\jmath}\| = 4\|\vec{\imath}\|$

1. Donner le développement de Taylor avec reste de Young de f à l'ordre 2 au voisinage de 4 et au voisinage de 6. Commenter ces développements.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
3. Etudier f

Exercice 11

Sur $[2,6]$, étudier la fonction f définie par

$f(x) = 2\sqrt{x-2}$ pour que $2 \leq x < 4$

Et $f(x) = -\frac{x}{2} + 2 + 2\sqrt{x-2}$ pour que $4 \leq x \leq 6$

Exercice 12

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

$(I) : \ln\big((x+2)(x-1)\big) = \ln(2-x)$

$(II) : \ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln(2-x)$

$(III) : \ln(x+2)^3 - \ln(x-1)^3 > 6$

$(IV) : \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}.(\mathrm{e}^{x})^2}{\mathrm{e}^4} = 1$

$(IV) : \dfrac{\mathrm{a}^{x^2}.(\mathrm{a}^{x})^2}{\mathrm{a}^4} > 1 \ \ pour\ a > 0$

Exercice 13

Etudier la fonction f, prolongement par continuité en 0 de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x}{lnx}$$

Exercice 14

Etudier la fonction $f: x \mapsto \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ pour $\frac{x+1}{x-1} > 0$

Exercice 15

1. Etudier la fonction f telle que $(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$, les points d'inflexion ne sont pas demandés.
2. Montrer que pour tout $x\ de\ ]0,2[$, la fonction f définit une fonction réciproque f^{-1} ; Construire sa courbe représentative Cf^{-1} d'équation $y = f^{-1}(x)$ dans un repère orthonormé.
3. Sans déterminer l'expression de f^{-1}, calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{e^2})$ et $(f^{-1})'(1)$
4. Déterminer f^{-1}, vérifier la continuité de cette fonction f^{-1}.

Exercice 16

1. Pour tout $\mathrm{n} \epsilon \mathbb{Q}$, trouver les primitives des fonctions

$$x \mapsto x^5(1 + x^6)^n$$

2. Déterminer

$$I_1(x) = \int x^5(1 + x^6)^5 \ dx$$

$$I_2(x) = \int \frac{x^5}{(1 + x^6)^5} \ dx$$

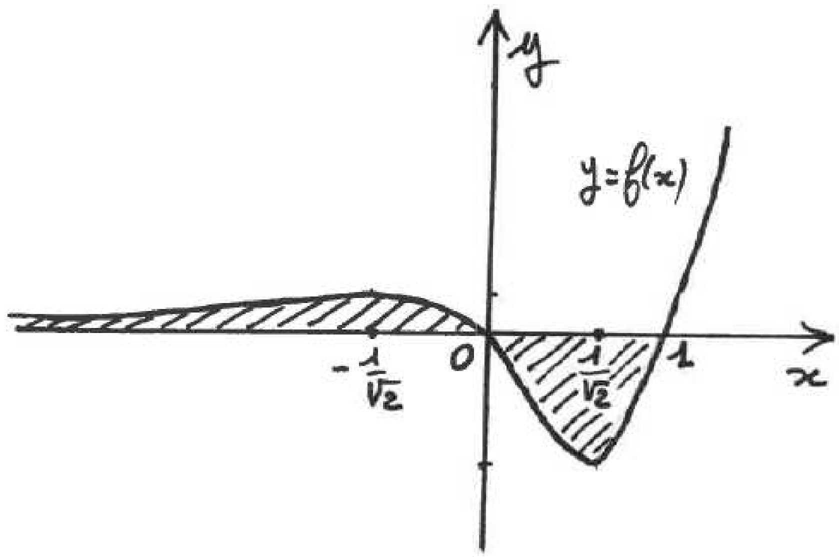
$$I_3(x) = \int x^5\sqrt{(1 + x^6)^3} \ dx$$

$$I_4(x) = \int \frac{x^5}{1 + x^6} \ dx$$

Exercice 17

Soit les fonctions f et g telles que $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$ et $g(x) = 4x\, ln(x^2 + 1)$

1. Déterminer $\int f\,(x)dx$ et $\int g(x)dx$
2. Calculer $\int_{-\infty}^{0} (x^2 - x)e^{2x}\, dx$



3. Dans le graphique ci-dessus, on donne la courbe représentative de la fonction f tracée dans un repère orthonormé ; Calculer l'aire A du domaine hachuré.
4. Soit $Cf\ et\ Cg$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g tracées dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal où $||\vec{\imath}|| = 2cm$ et $||\vec{\jmath}|| = 5cm$.
   Calculer l'aire B du domaine délimité par les courbes Cf , Cg et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.